数理解析研究所講究録
第1660巻 2009年 92-94

リーマン面のモジュライ空間上のある実数値函数について
ON A REAL-VALUED FUNCTION ON THE MODULI OF RIEMANN SURFACES

河澄響矢 (東大数理)
NARIYA KAWAZUMI
(UNIV. OF TOKYO, DEPT. OF MATH. SCI.)

写像類群の研究において Johnson 準同型は重要な役割を演じている。たとえば森田 [M] が示したように第一拡大 Johnson 準同型によってすべての森田マンフォード類が得られる。Johnson 準同型を手がかりとして種数 g コンパクト・リーマン面のモジュライ空間 $\mathbb{M}_g$ の微分幾何的な研究を行いたい。$\mathcal{L}$ をモジュライ空間 $\mathbb{M}_g$ 上の Hodge 直線束とする。Hain と Reed [HR] は第一 Johnson 準同型の Hodge 理論における対応物を用いてモジュライ空間 $\mathbb{M}_g$ 上に $\mathcal{L}^{\otimes(8g+4)}$ と同型な直線束 $\mathcal{B}$ とその上の Hermite 計量を構成し、この計量を $\mathcal{L}$ 上の standard な計量と比較することでモジュライ空間 $\mathbb{M}_g$ 上の実数値函数 $\beta_g : \mathbb{M}_g \to \mathbb{R}$ を構成している。

種数 $g \geq 1$ のコンパクト・リーマン面の普遍族 $\pi : \mathbb{C}_g \to \mathbb{M}_g$ について、相対接束 $T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}$ から 0 切断を取り除いたものを $\mathbb{M}_{g,1}$ とする。以前の論文 [K1] において空間 $\mathbb{M}_{g,1}$ 上のあるベクトル束の平坦接続であって、その holonomy が(すべての次数の)Johnson 準同型(を集めたもの)となるものを定義した。この接続形式(η と書く)の一番目(η_1 と書く)は、以前から知られており、(点つき)調和体積の第一変分 [H] に他ならない。η から森田 Mumford 類を表す微分形式をつくることができる。とくに森田 [M] のやり方を用いて、相対接束の Chern 類を表す微分形式 $e^J \in A^2(\mathbb{C}_g)$ および第一森田 Mumford 類を表す微分形式 $e_1^J \in A^2(\mathbb{M}_g)$ を一通りのやり方で作ることができる。ここで A^q は q-形式全体の空間をあらわす。(なお、高次の森田 Mumford 類では微分形式を作るやり方は一通りではなく、Stasheff 結合多面体や実安定(点つき)有理曲線の moduli 空間が関わってくる。)

本稿ではまず微分形式 e^J に着目する。これを普遍族 $\pi : \mathbb{C}_g \to \mathbb{M}_g$ の各ファイバー、すなわち種数 g の任意のコンパクト・リーマン面 C の上で見ると

$$e^J|_C = (2-2g)B \in A^2(C)$$

となる。ここで B は C 上の正則 1-形式の正規直交基底 $\{\psi_i\}_{i=1}^g$, $\frac{\sqrt{-1}}{2}\int_C \psi_i \wedge \overline{\psi_j} = \delta_{i,j}$, $1 \leq i,j \leq g$, について $B = \frac{\sqrt{-1}}{2g}\sum_{i=1}^g \psi_i \wedge \overline{\psi_i}$ によって与えられ、正規直交基底のとり方によらない C の面積要素である。このことは e^J が Arakelov 認容計量と関係することを示唆している。

コンパクト・リーマン面 C 上の Arakelov-Green 函数 G_C をすべて集めたもの G を fiber 積 $\mathbb{C}_g \times_{\mathbb{M}_g} \mathbb{C}_g$ 上の函数と考える。fiber 積における対角集合の法束は相対接束 $T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}$ に他ならない。そこで函数 G は相対接束の曲率形式

$$e^A := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\partial\overline{\partial}\log G|_{(diagonal)} \in A^2(\mathbb{C}_g)$$

を定める。Arakelov [A] が指摘しているように、各 C について

$$e^A|_C = (2-2g)B \in A^2(C)$$

が成立つ。したがって、差 $e^A - e^J$ は普遍族 π の各ファイバーの上では 0 になっている。しかし、差 $e^A - e^J$ は null-cohomologous だが $\mathbb{C}_g$ 上の微分形式としては 0 ではない。この差を表すモジュライ空間 $\mathbb{M}_g$ 上の函数を与えることができた。

$$a_g(C) := -\sum_{i,j=1}^{g} \int_C \psi_i \wedge \overline{\psi_j}\, \widehat{\Phi}(\overline{\psi_i} \wedge \psi_j)$$

とおく。ここで、$\widehat{\Phi} : A^2(C) \to A^0(C)$ は面積要素 B に関する Green 作用素である。$*$ によって Hodge $*$-作用素をあらわす。任意の 2-形式 $\Omega \in A^2(C)$ について $d{*}d\widehat{\Phi}(\Omega) = \Omega - (\int_C \Omega)B$ および $\int_C \widehat{\Phi}(\Omega)B = 0$ が成立つ。$a_g(C)$ が、正則 1-形式の正規直交基底 $\{\psi_i\}$ のとり方によらずリーマン面 C だけで決まること、つまりリーマン面 C の等角不変量であることがわかる。また、$g \geq 2$ のとき $a_g(C)$ は正の実数である。

本稿の 1 番目の結果は次の通りである。

定理 1.

$$e^A - e^J = \frac{-2\sqrt{-1}}{2g(2g+1)} \partial\overline{\partial} a_g.$$

証明では、まず函数 $a_g : \mathbb{M}_g \to \mathbb{R}$ の第一変分 $\dot{a_g}$ を具体的な二次微分として表す。要点は、e^J が上述の接続形式 η の二番目 η_2 の外微分によって表されることである。これによって（より複雑な 2-形式ではなく）1-形式のレベルで e^A, e^J および a_g を比較することが可能となる。

つぎに微分形式 e_1^J を考える。さらに $e_1^F := \int_{fiber} (e^J)^2$ とおくと、これも第一森田 Mumford 類を表す微分形式である。ここでも、差 $e_1^J - e_1^F \in A^2(\mathbb{M}_g)$ は null-cohomologous だが微分形式としては 0 ではない。こんどは a_g の第二変分, e_1^J および e_1^F を具体的に書き下し、比較することによって次の結果がえられる。

定理 2.

$$\frac{-2\sqrt{-1}}{2g(2g+1)} \partial\overline{\partial} a_g = \frac{1}{(2g-2)^2}(e_1^F - e_1^J).$$

差 $e_1^F - e_1^J$ は $\mathbb{M}_g$ 上の null-cohomologous な実 $(1,1)$-形式である。また、$g \geq 3$ のとき $\mathbb{M}_g$ 上の正則函数は定数しかない。そこで、少なくとも $g \geq 3$ のときは、実数値函数 $a : \mathbb{M}_g \to \mathbb{R}$ が存在して、差は $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\partial\overline{\partial} a$ と表されなければならないことは一般論からも分かる。函数 a は実数値定数函数の差を除いて一意的である。したがってこの結果の要点は、すべての $g \geq 1$ について函数 a が「具体的に」表示されるという点である。

以上二つの定理の系として次の結果が得られる。

系 3.

$$e^A - e^J = \frac{1}{(2g-2)^2}(e_1^F - e_1^J).$$

なお、函数 a_g についてここに述べた以上のことは全く不明である。本稿に関する詳細は [K2] を参照してください。

文献

[A] S. Ju. Arakelov, Intersection theory of divisors on an arithmetic surface, Math. USSR Izvestija, 8 (1974) 1167-1180.

[HR] R. Hain and D. Reed, On the Arakelov geometry of moduli space of curves, J. Diff. Geom., 67 (2004) 195-228.

[H] B. Harris, Harmonic volumes, Acta Math., 150 (1983), 91-123.

[K1] N. Kawazumi, Harmonic Magnus expansion on the universal family of Riemann surfaces, preprint `math.GT/0603158`.

[K2] ——, Johnson's homomorphisms and the Arakelov-Green function, preprint `arXiv.0801.4218`.

[M] S. Morita, A linear representation of the mapping class group of orientable surfaces and characteristic classes of surface bundles, in *Topology and Teichmüller Spaces*, World Scientific, 1996, 159-186.